

Научная статья

УДК 517.518

DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-128-148

ПЛОЩАДЬ ОБРАЗОВ ЛИПШИЦЕВЫХ КОМПОЗИЦИЙ НА ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ КАРНО

Мария Борисовна Карманова

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия

maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8562-1513>

Аннотация

Для классов композиций, или цепочек, являющихся липшицевыми отображениями двухступенчатых групп Карно, установлены дифференциальные (в классическом смысле) свойства и выведена формула площади.

Ключевые слова и фразы

липшицево отображение, внутренняя метрика, композиция отображений, цепочка отображений, двухступенчатая группа Карно, формула площади

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0022)

Для цитирования

Карманова М. Б. Площадь образов липшицевых композиций на двухступенчатых группах Карно // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 128-148. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-128-148

Area of Lipschitz Compositions' Images on Two-Step Carnot Groups

Maria B. Karmanova

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

© Карманова М. Б., 2026

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 3, С. 128-148
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 3, P. 128-148

Abstract

For classes of compositions, or chains, that are Lipschitz mappings of two-step Carnot groups, differential (in the classical sense) properties are established and an area formula is derived.

Keywords

Lipschitz mapping, intrinsic metric, composition of mappings, chain of mappings, two-step Carnot group, area formula

Funding

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS (project FWNF-2026-0022)

For citation

Karmanova M. B. Area of Lipschitz Compositions' Images on Two-Step Carnot Groups // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 128-148. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-128-148

Введение

В статье продолжены исследования, начатые в [1], композиций, или цепочек, отображений, являющихся липшицевыми отображениями двухступенчатых групп Карно. Композицией φ и ψ будем называть отображение ψ_φ , сопоставляющее каждой точке x области определения цепочку из двух точек, $\varphi(x)$ и $\psi_\varphi(x)$, конечный элемент которой — групповое произведение образов этой точки. Частным случаем композиции отображений является отображение-график, где первое отображение в цепочке — тождественное. Напомним, что в задачах классического анализа и его обобщений отображения-графики играют существенную роль; см. описание приложений в [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], а также, комментарии, мотивацию исследований и краткий обзор литературы в [1], [9]. В работах [10] и [11] исследованы композиции классов липшицевых в субримановом смысле отображений, тогда как сама композиция в общем случае таковой не являлась. Здесь же мы считаем, что композиция уже обладает свойством внутренней липшицевости, а формула площади устанавливается в терминах свойств, выведенных для составляющих композицию отображений. Для базового случая, — липшицевых графиков, — формула площади установлена в [12]; в данной же статье она будет выведена для композиций с учетом специфики, характерной именно для случая, когда у первого отображения в цепочке нет аналога свойства линейности. Напомним, что такие результаты могут быть полезны при исследовании классов многозначных функций (соответствий) на группах Карно, если для образа такого соответствия существует подходящая параметризация через группу Карно большей размерности.

§ 1. Двухступенчатые группы Карно и композиции отображений

Определение 1.1 ([13]). Двухступенчатая группа Карно — это связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представима в виде $V = V_1 \oplus V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = \{0\}$.

Если базисное поле X_l принадлежит V_k , то его *степень* $\deg X_l$ равна k , $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Обозначение 1.2. Обозначим символом $\dim V_k$ размерность V_k (в каждой точке), $k = 1, 2$.

Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Если $x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j X_j\right)(0)$, $y = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(0)$, то

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j X_j\right)(0),$$

где

$$\begin{cases} z_j = x_j + y_j & \text{для } \deg X_j = 1 \\ z_j = x_j + y_j + \sum_{\mu, \beta: \deg X_\mu = \deg X_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^j x_\mu y_\beta & \text{для } \deg X_j = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Значения $\{F_{\mu, \beta}^j\}_{j, \mu, \beta}$ называются *структурными константами* и не зависят от точек.

Отметим, что часто в исследованиях на неголономных структурах используют метрику Карно — Каратеодори (см., например, [14]). Однако, недостаток такой метрики состоит в том, что структура построенных по ней шаров в настоящее время известна только в нескольких частных случаях (см., например, [15]). По этой причине в качестве расстояния будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную метрике Карно — Каратеодори.

Определение 1.3 (см., например, [16]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Положим

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j: \deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Из определения видно, что d_2 является субримановым обобщением евклидовой метрики. Из формул групповой операции (1) следует

Свойство 1.4. Величина $d_2(v, w)$ локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности, и для всякой компактной окрестности $D \subset \mathbb{G}$ существует константа $C_D < \infty$ такая, что обобщенное неравенство треугольника

$$d_2(v, w) \leq C_D(d_2(v, u) + d_2(u, w))$$

верно для всех $v, u, w \in D$.

Обозначение 1.5. Шар в квазиметрике d_2 радиуса r с центром в точке u , равный $\{w \in \mathbb{G} : d_2(u, w) < r\}$, обозначим символом $\text{Box}_2(u, r)$.

Определение 1.6. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (относительно $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$. Координаты при горизонтальных полях будем называть *горизонтальными координатами*.

Из определения 1.3 вытекает

Свойство 1.7. Образ шара $\text{Box}_2(u, r)$ при отображении θ_u^{-1} совпадает с декартовым произведением двух (евклидовых) шаров, диаметры которых равны $2r$ и $2r^2$.

Рассмотрим теперь еще одну двухступенчатую группу Карно $\tilde{\mathbb{G}}$ с алгеброй Ли $\tilde{V} = \bigoplus_{k=1}^2 \tilde{V}_k$ и базисными полями $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$. Квазиметрику, построенную на $\tilde{\mathbb{G}}$ так же, как описано в определении 1.3, обозначим символом $\tilde{d}_2$.

Определение 1.8. Пусть $\tilde{\mathbb{G}}, \mathbb{G}$ — группы Карно, $E \subset \tilde{\mathbb{G}}$, и $\varphi : E \rightarrow \mathbb{G}$. Будем говорить, что отображение φ *липшицево во внутреннем смысле*, или *липшицево в субримановом смысле*, если существует константа $0 < L < \infty$ такая, что

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L\tilde{d}_2(x, y).$$

Напомним основные условия задачи (см. также [1]).

Предположение 1.9. Пусть $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ — двухступенчатые группы Карно с базисными полями $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ и $\{\hat{X}_k\}_{k=1}^{\hat{N}}$ соответственно и построенными, как в определении 1.3, квазиметриками $\tilde{d}_2$ и $\hat{d}_2$ соответственно. Будем предполагать, что они являются подмножествами двухступенчатой группы Карно $\mathbb{G}$ топологической размерности $N = \tilde{N} + \hat{N}$ со структурными константами $\{F_{\mu,\beta}^i\}_{i,\mu,\beta}$ и квазиметрикой d_2 . Пусть еще базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{G}$ таковы, что, во-первых, $\dim V_k = \dim \tilde{V}_k + \dim \hat{V}_k$, $k = 1, 2$, и, во-вторых,

$$\begin{aligned} X_1|_{\tilde{\mathbb{G}}} &= \tilde{X}_1, \dots, X_{\dim \tilde{V}_1}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1}, \\ X_{\dim V_1+1}|_{\tilde{\mathbb{G}}} &= \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1+1}, \dots, X_{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\tilde{N}} \end{aligned} \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} X_{\dim \tilde{V}_1+1}|_{\hat{\mathbb{G}}} &= \hat{X}_1, \dots, X_{\dim V_1}|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_{\dim \hat{V}_1}, \\ X_{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2+1}|_{\hat{\mathbb{G}}} &= \hat{X}_{\dim \hat{V}_1+1}, \dots, X_N|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_{\hat{N}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Предположим также, что $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ пересекаются в единице $\mathbf{0}$ группы $\mathbb{G}$. Будем точку этого пересечения считать в каждой группе за единицу (это всегда можно сделать посредством сдвигов). Заметим, что так как $\{X_i\}_{i=1}^N$ — базис, то в силу соотношений (2) и (3) элемент $\mathbf{0}$ является единственной точкой пересечения $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$. Действительно, наличие другой точки их пересечения противоречило бы линейной независимости набора $\{X_i\}_{i=1}^N$.

Пусть еще $\mathcal{G}$ — некоторая двухступенчатая группа Карно с базисными полями $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ топологической размерности N , алгеброй Ли полей $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ и расстоянием ρ_2 , заданным, как в определении 1.3.

Определение 1.10. Пусть $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, где $\varphi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \varphi_i(x) \tilde{X}_i\right)(\tilde{\mathbf{0}})$, а $\tilde{\mathbf{0}}$ — единица группы $\tilde{\mathbb{G}}$. Набор $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\tilde{N}}$ будем называть *координатными функциями отображения* φ .

Координатные функции при горизонтальных полях будем называть *горизонтальными координатными функциями*.

Перейдем к определению композиции отображений двухступенчатых групп Карно.

Определение 1.11. Рассмотрим отображения $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ и $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$. Пусть

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \varphi_i(x) \tilde{X}_i\right)(\tilde{\mathbf{0}})$$

и

$$\psi(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\widehat{N}} \psi_j(x) \widehat{X}_j\right)(\widehat{\mathbf{0}}),$$

где $\widetilde{\mathbf{0}}$ и $\widehat{\mathbf{0}}$ — единицы групп $\widetilde{\mathbb{G}}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ соответственно. Тогда композиция ψ_φ отображений φ и ψ определяется следующим образом:

$$\psi_\varphi(x) = \exp\left(\sum_{k=\dim \widetilde{V}_1+1}^{\dim V_1} \psi_{k-\dim \widetilde{V}_1}(x) X_k + \sum_{k=\dim V_1+\dim \widetilde{V}_2+1}^N \psi_{k-\widetilde{N}}(x) X_k\right)(\varphi(x)),$$

где

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\dim \widetilde{V}_1} \varphi_i(x) X_i + \sum_{i=\dim V_1+1}^{\dim V_1+\dim \widetilde{V}_2} \varphi_{i-\dim \widetilde{V}_1}(x) X_i\right)(\mathbf{0})$$

рассматривается, как элемент группы $\widetilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{G}$.

Замечание 1.12. Если $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$ и $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$, то в силу некоммутативности полей на $\mathbb{G}$, в общем случае $\psi_\varphi \neq \varphi_\psi$.

Введем

Обозначение 1.13. Пусть $\{\varphi_x^k(y)\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$ — такие координаты, что

$$\varphi(y) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \varphi_x^k(y) \widetilde{X}_k\right)(\varphi(x)),$$

а $\{\psi_x^k(y)\}_{k=1}^{\widehat{N}}$ — такие координаты, что

$$\psi(y) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\widehat{N}} \psi_x^k(y) \widehat{X}_k\right)(\psi(x)).$$

Координаты при горизонтальных векторных полях будем также называть *горизонтальными*.

Для доказательства формулы площади нам потребуются уточненные свойства отображений φ и ψ , при которых композиция ψ_φ (локально) липшицева и непрерывно h -дифференцируема. Рассмотрим $x \in \mathcal{G}$ и произвольную точку y из окрестности x . Тогда

$$\psi_\varphi(y) = \left(\sum_{l=1}^N \xi_l(x, y) X_l\right)(\psi_\varphi(x)),$$

где зависящие от x и y функции $\{\xi_l(x, y)\}_{l=1}^N$ описываются следующими явными выражениями.

Свойство 1.14. Верны следующие соотношения.

1. Если $l = 1, \dots, \dim \tilde{V}_1$, то $\xi_l(x, y) = \varphi_x^l(y)$.
2. Если $l = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \dim V_1$, то $\xi_l(x, y) = \psi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y)$.
3. Если $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$, то

$$\begin{aligned} \xi_l(x, y) = & \varphi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y) - \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_x^{\mu-\dim \tilde{V}_1}(y) \\ & - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x). \quad (4) \end{aligned}$$

4. Если $l = \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2 + 1, \dots, N$, то

$$\begin{aligned} \xi_l(x, y) = & \psi_x^{l-\tilde{N}}(y) - \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_x^{\mu-\dim \tilde{V}_1}(y) \\ & - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x). \end{aligned}$$

Далее будем считать, что горизонтальные координатные функции композиции непрерывно h -дифференцируемы. Кроме того, так как мы рассматриваем случай, когда композиция ψ_φ локально липшицева в субримановом смысле, то будем считать, что выполнены условия [1, Теорема 2.5] о дифференциальных и субриманово дифференциальных свойствах координат $\{\varphi_x^k(y)\}_{k=1}^{\tilde{N}}$ и $\{\psi_x^k(y)\}_{k=1}^{\tilde{N}}$ и о свойствах величин $o(1)$ из определений (субримановой) дифференцируемости. Напомним соответствующее определение.

Определение 1.15 ([14], см. также [17]). Функция $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ является h -дифференцируемой, или субриманово дифференцируемой, в точке $x \in \mathcal{G}$, если существует отображение

$$\nabla_H f(x) : y = \exp\left(\sum_{k=1}^N y_k \mathcal{X}_k\right)(x) \mapsto f(x) + \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{V}_1} a_i(x) y_i = f(x) + \nabla_H f(x) \langle y \rangle$$

такое, что $|f(y) - f(x) - \nabla_H f(x) \langle y \rangle| = o(\rho_2(x, y))$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

Отображение $\nabla_H f(x)$ называется *hc-дифференциалом*, или *субримановым дифференциалом*, или *горизонтальным градиентом* функции f в точке x .

§ 2. Дифференциальные свойства элементов композиции и формула площади

В данном разделе мы установим дифференциальные свойства отображений φ и ψ , являющиеся более тонкими сравнительно с установленными в [1]. Прежде всего, для фиксированного $x \in \mathcal{G}$ введем вспомогательные точки.

Обозначение 2.1. Пусть $x \in \mathcal{G}$. Положим $y_H = \exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathcal{V}_1} y_k \mathcal{X}_k\right)(x)$ и $y_T = \exp\left(\sum_{k=\dim \mathcal{V}_1+1}^N y_k \mathcal{X}_k\right)(x)$.

Свойство 2.2. В силу (1) для $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$ верно

$$y = \exp\left(\sum_{k=\dim \mathcal{V}_1+1}^N y_k \mathcal{X}_k\right)(y_H). \quad (5)$$

Следующие утверждения, теоремы 2.3 о необходимых условиях и 2.6 о субримановой дифференцируемости классов отображений, потребуются для дальнейших рассуждений и вывода метрических свойств. Сформулируем сначала теорему о необходимых условиях, усиление которой будет установлено в ходе исследования.

Теорема 2.3. Если композиция ψ_φ является локально липшицевой относительно ρ_2 и d_2 , где горизонтальные координатные функции φ и ψ непрерывно *hc-дифференцируемы*, то φ и ψ обладают следующими свойствами в каждой точке $x \in \mathcal{G}$.

1. Для $p = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ отображение $y_H \mapsto \varphi_x^p(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , при этом, дифференциал равен

$$2 \sum_{\substack{\tau: \deg \hat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \hat{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \tilde{V}_1, \beta}^{p+\dim \tilde{V}_1} \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \psi_\tau(x), \quad (6)$$

и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$.

2. Для $p = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ отображение $y_T \mapsto \varphi_x^p(y_T)$ является h -дифференцируемым в точке x , и его h -дифференциал равен нулю.
3. Для $q = \dim \hat{V}_1 + 1, \dots, \hat{N}$ отображение $y_H \mapsto \psi_x^q(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , при этом, дифференциал равен

$$2 \sum_{\substack{\mu: \deg \tilde{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \tilde{V}_1, \beta}^{q+\tilde{N}} \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \psi_\tau(x), \quad (7)$$

и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$.

4. Для $q = \dim \hat{V}_1 + 1, \dots, \hat{N}$ отображение $y_T \mapsto \psi_x^q(y_T)$ является h -дифференцируемым в точке x , и его h -дифференциал равен нулю.

Замечание 2.4. Утверждение теоремы 2.3 справедливо и для случая, когда композиция ψ_φ является локально липшицевой относительно ρ_2 и d_2 , а непрерывно h -дифференцируемыми являются только горизонтальные координатные функции с номерами $1, \dots, \dim \tilde{V}_1$ (соответствующие отображению φ).

Определение 2.5 ([14]; см. также [17]). Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathbb{G}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathcal{G}$ и $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$. Отображение ξ является h -дифференцируемым, или дифференцируемым в субримановом смысле, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{G}$ такой, что

$$d_2(\xi(y), \mathcal{L}_x \langle y \rangle) = o(1) \cdot \rho_2(x, y), \text{ где } o(1) \rightarrow 0 \text{ при } \Omega \ni y \rightarrow x.$$

h -Дифференциал (или субриманов дифференциал) $\mathcal{L}_x$ обозначается символом $\hat{D}\xi(x)$.

Следующий результат установлен в Р. Pansu [14] для открытых множеств, и С.К. Водопьяновым (см. также, например, [17]) для измеримых множеств. Сформулируем ее для нашего случая.

Теорема 2.6. Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathbb{G}$ — двухступенчатые группы Карно, $D \subset \mathcal{G}$ — измеримое множество, и $\xi : D \rightarrow \mathbb{G}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда оно h -дифференцируемо почти всюду. Кроме того, матрица $\hat{D}\xi$ в базисах $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^N$ и $\{X_j\}_{j=1}^N$ состоит из «диагональных» $(\dim V_k \times \dim \mathcal{V}_k)$ -блоков, а остальные элементы нулевые, $k = 1, 2$.

Обозначение 2.7. Здесь и далее под «диагональными» блоками понимаются блоки, состоящие из элементов, номер строки которых соответствует полям из V_k , а номер столбца — полям из $\mathcal{V}_k$, $k = 1, 2$. Таким образом, размерность этих блоков равна $\dim V_k \times \dim \mathcal{V}_k$.

Обозначение 2.8. Пусть $\xi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{G}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение, а $x \in \mathcal{G}$ — точка hc -дифференцируемости отображения ξ . Для образа точки y из окрестности x положим

$$\widehat{D}\xi(x)\langle y \rangle = \exp\left(\sum_{l=1}^N (\widehat{D}\xi(x)\langle y \rangle)_l X_l\right)(\xi(x)).$$

Для формулировки ключевого результата нам потребуется ввести

Обозначение 2.9. Если функция f является дифференцируемой в классическом смысле в точке x , то положим

$$\sigma_f(x, y) = f(y) - f(x) - \nabla f(x)\langle y \rangle. \quad (8)$$

Если же функция f является hc -дифференцируемой в точке x , то положим

$$\widehat{\sigma}_f(x, y) = f(y) - f(x) - \nabla_H f(x)\langle y \rangle. \quad (9)$$

Сформулируем и докажем ключевой результат статьи, который является усилением теоремы 2.3, и касается классических дифференциальных свойств составляющих композицию отображений.

Теорема 2.10. Пусть выполнены условия предположения 1.9, композиция ψ_φ является локально липшицевой относительно ρ_2 и d_2 , а горизонтальные координатные функции φ и ψ непрерывно hc -дифференцируемы. Пусть еще $x \in \mathcal{G}$ — произвольная точка области определения отображений φ и ψ , в которой ψ_φ является hc -дифференцируемым отображением. Тогда функции $\{\varphi_x^p(y)\}_{p=\widetilde{V}_1+1}^{\widetilde{N}}$ и $\{\psi_x^q(y)\}_{q=\widehat{V}_1+1}^{\widehat{N}}$ обладают следующими свойствами.

1. Для $p = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ каждая функция

$$y_H \mapsto \sigma_{\varphi_x^p}(x, y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^{p+\dim \widehat{V}_1} \widehat{\sigma}_{\varphi_x^\beta}(x, y_H) \psi_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}(x)$$

дважды дифференцируема по горизонтальным переменным, где первый дифференциал равен нулю, а второй равен

$$\sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^{p+\dim \widehat{V}_1} \nabla_H \varphi_\beta(x)\langle y_H \rangle \cdot \nabla_H \psi_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}(x)\langle y_H \rangle.$$

2. Для $q = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \widehat{N}$ каждая функция

$$y_H \mapsto \sigma_{\psi_x^q}(x, y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu - \dim \widetilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^{q + \widehat{N}} \widehat{\sigma}_{\varphi_x^\beta}(x, y_H) \psi_{\mu - \dim \widetilde{V}_1}(x)$$

дважды дифференцируема по горизонтальным переменным, где первый дифференциал равен нулю, а второй равен

$$\sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu - \dim \widetilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^{q + \widehat{N}} \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \cdot \nabla_H \psi_{\mu - \dim \widetilde{V}_1}(x) \langle y_H \rangle.$$

3. Если $p = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$, то функция

$$y_T \mapsto \varphi_x^p(y_T) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu - \dim \widetilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^{p + \dim \widehat{V}_1} \varphi_x^\beta(y_T) \psi_{\mu - \dim \widetilde{V}_1}(x)$$

дифференцируема в классическом смысле по $y_{\dim \mathcal{V}_1 + 1}, \dots, y_{\mathcal{N}}$. Кроме того, значение ее дифференциала в точке x на элементе y_T равно $(\widehat{D}\psi_\varphi(x)\langle y \rangle)_{p + \dim \widehat{V}_1} = (\widehat{D}\psi_\varphi(x)\langle y_T \rangle)_{p + \dim \widehat{V}_1}$.

4. Если же $q = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \widehat{N}$, то функция

$$y_T \mapsto \psi_x^q(y_T) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu - \dim \widetilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^{q + \widehat{N}} \varphi_x^\beta(y_T) \psi_{\mu - \dim \widetilde{V}_1}(x)$$

дифференцируема в классическом смысле по $y_{\dim \mathcal{V}_1 + 1}, \dots, y_{\mathcal{N}}$. Кроме того, значение ее дифференциала в точке x на элементе y_T равно $(\widehat{D}\psi_\varphi(x)\langle y \rangle)_{q + \widetilde{N}} = (\widehat{D}\psi_\varphi(x)\langle y_T \rangle)_{q + \widetilde{N}}$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbb{G}$, где $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$. Тогда $\psi_\varphi(y) = \left(\sum_{l=1}^N \xi_l(x, y) X_l\right)(\psi_\varphi(x))$, где координаты $\{\xi_l(x, y)\}_{l=1}^N$ в явном виде приведены в свойстве 1.14.

Пусть $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2$. Тогда для соответствующих координат $\xi_l(x, y)$ верно (4). Используя соотношения (1) и (5), преобразуем

$\varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y)$ в терминах $\varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y_H)$ и $\varphi_{y_H}^{l-\dim \widehat{V}_1}(y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y) &= \varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y_H) + \varphi_{y_H}^{l-\dim \widehat{V}_1}(y) \\ &\quad + \sum_{\substack{\lambda, \alpha: \\ \lambda, \alpha \in [1, \dim \widetilde{V}_1]}} F_{\lambda, \alpha}^l \varphi_x^\lambda(y_H) \varphi_{y_H}^\alpha(y). \end{aligned}$$

Из (4) следует

$$\begin{aligned} \xi_l(x, y) &= \varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y_H) + \varphi_{y_H}^{l-\dim \widehat{V}_1}(y) + \sum_{\substack{\lambda, \alpha: \\ \lambda, \alpha \in [1, \dim \widetilde{V}_1]}} F_{\lambda, \alpha}^l \varphi_x^\lambda(y_H) \varphi_{y_H}^\alpha(y) \\ &\quad - \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\mu, \beta}^l (\varphi_x^\beta(y_H) + \varphi_{y_H}^\beta(y)) (\psi_x^{\mu-\dim \widetilde{V}_1}(y_H) + \psi_{y_H}^{\mu-\dim \widetilde{V}_1}(y)) \\ &\quad - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\mu, \beta}^l (\varphi_x^\beta(y_H) + \varphi_{y_H}^\beta(y)) \psi_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}(x). \quad (10) \end{aligned}$$

Если в точке x существует субриманов дифференциал $\widehat{D}\psi_\varphi(x)$, то из определения 2.5 и из (1) вытекает, что

$$|\xi_l(x, y) - (\widehat{D}\psi_\varphi(x)\langle y \rangle)_l| = o(d_2(x, y)^2)$$

(см. обозначение 2.8). Для $y = y_H$ верно $(\widehat{D}\psi_\varphi(x)\langle y \rangle)_l = 0$ для каждого $l > \dim V_1$ в силу теоремы 2.6; кроме того, $d_2(x, y_H)^2 = \sum_{i=1}^{\dim V_1} (y_i)^2$, поэтому

$$\begin{aligned} &\left| \varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\mu, \beta}^l (\varphi_x^\beta(y_H)) \psi_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \widetilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\mu, \beta}^l (\varphi_x^\beta(y_H)) (\psi_x^{\mu-\dim \widetilde{V}_1}(y_H)) \right| = o\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} (y_i)^2\right). \quad (11) \end{aligned}$$

Так как горизонтальные координатные функции отображений φ и ψ по

условию hc -дифференцируемы, верно

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_x^{l-\dim \hat{V}_1}(y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l(\varphi_x^\beta(y_H)) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \cdot \nabla_H \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \langle y_H \rangle \right| = o\left(\sum_{i=1}^{\dim \mathcal{V}_1} (y_i)^2\right) \end{aligned} \quad (12)$$

(см. определение 1.15). Далее, так как композиция ψ_φ является локально липшицевой относительно ρ_2 и d_2 , а горизонтальные координатные функции φ и ψ непрерывно hc -дифференцируемы, то, во-первых, $\varphi_x^{l-\dim \hat{V}_1}(y_H)$ непрерывно дифференцируемо по горизонтальным переменным (см. теорему 2.3), и, во-вторых, верхнюю строку полученного соотношения можно представить, как

$$\begin{aligned} & \varphi_x^{l-\dim \hat{V}_1}(y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l(\varphi_x^\beta(y_H)) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \\ & = \nabla \varphi_{l-\dim \hat{V}_1}(x) \langle y_H \rangle - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \\ & \quad + \sigma_{\varphi_x^{l-\dim \hat{V}_1}}(x, y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \hat{\sigma}_{\varphi_x^\beta}(x, y_H) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \\ & = \sigma_{\varphi_x^{l-\dim \hat{V}_1}}(x, y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \hat{\sigma}_{\varphi_x^\beta}(x, y_H) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \end{aligned}$$

в силу (6) (см. (8) и (9)). Полученное выражение не превосходит величину $L(\rho_2(x, y_H))^2$, так как композиция ψ_φ по условию липшицева; см. теорему 2.3. Из (12) вытекает, что функция

$$y_H \mapsto \sigma_{\varphi_x^{l-\dim \hat{V}_1}}(x, y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \hat{\sigma}_{\varphi_x^\beta}(x, y_H) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x)$$

также является дважды дифференцируемой по горизонтальным перемен-

ным, где первый дифференциал равен нулю, а второй равен

$$\sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \cdot \nabla_H \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \langle y_H \rangle.$$

Первое утверждение для $\{\varphi_x^p(y)\}_{p=\tilde{V}_1+1}^{\hat{N}}$, где $p = l - \dim \hat{V}_1$, доказано.

Аналогичное утверждение для $\{\psi_x^q(y)\}_{q=\hat{V}_1+1}^{\hat{N}}$ устанавливается по такой же схеме.

Далее, так как для горизонтальных функций и координат из (10) верно

$$\max\{|\varphi_{y_H}^\alpha(y)|, |\varphi_{y_H}^\beta(y)|, |\psi_{y_H}^{\mu-\dim \tilde{V}_1}(y)|\} = o(\rho_2(x, y)),$$

то с учетом (11) имеем

$$\begin{aligned} \xi_l(x, y) &= \varphi_{y_H}^{l-\dim \hat{V}_1}(y) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_{y_H}^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) + o(\rho_2(x, y)^2) \\ &= (\hat{D}\psi_\varphi(x) \langle y \rangle)_l + o(\rho_2(x, y)^2), \end{aligned}$$

или,

$$\begin{aligned} \varphi_{y_H}^{l-\dim \hat{V}_1}(y) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_{y_H}^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) + o(\rho_2(x, y)^2) \\ = (\hat{D}\psi_\varphi(x) \langle y \rangle)_l. \end{aligned}$$

Так как правая часть не зависит от координат элемента y_H (см. теорему 2.6), рассмотрим случай, когда все эти координаты равны нулю. Тогда получим $y_H = x$, $y = y_T$, и поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_x^{l-\dim \hat{V}_1}(y_T) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y_T) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \\ = (\hat{D}\psi_\varphi(x) \langle y_T \rangle)_l + o(\rho_2(x, y_T)^2). \end{aligned}$$

Так как $\rho_2(x, y_T)^2 = \sqrt{\sum_{\lambda=\dim \mathcal{V}_1+1}^{\mathcal{N}} (y_\lambda)^2}$, то что функция

$$y_T \mapsto \varphi_x^{l-\dim \hat{V}_1}(y_T) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y_T) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x)$$

дифференцируема в классическом смысле по $y_{\dim V_1+1}, \dots, y_N$ в точках x субримановой дифференцируемости композиции ψ_φ для всех $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$. Кроме того, значение ее дифференциала в точке x на элементе y_T равно $(\widehat{D}\psi_\varphi(x)\langle y \rangle)_l = (\widehat{D}\psi_\varphi(x)\langle y_T \rangle)_l$, $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$.

Аналогичное утверждение для $\{\psi_x^q(y)\}_{q=\widehat{V}_1+1}^{\widehat{N}}$ устанавливается по такой же схеме. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.11. Если φ — горизонтальный гомоморфизм, то в утверждениях 2 и 4 теоремы 2.10 верно

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^{q+\tilde{N}} \widehat{\sigma}_{\varphi_\beta}(x, y_H) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \\ = \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^{q+\tilde{N}} \varphi_\beta^\beta(y_T) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) = 0, \end{aligned}$$

и поэтому функция $y_H \mapsto \psi_x^q(y_H)$ будет дифференцируема дважды по горизонтальным переменным, а функция $y_T \mapsto \psi_x^q(y_T)$ будет дифференцируема в классическом смысле по $y_{\dim V_1+1}, \dots, y_N$, $q = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \widehat{N}$.

Обозначение 2.12. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_x^H(y_H) &= \exp\left(\sum_{p=1}^{\dim \tilde{V}_1} \varphi_x^p(y_H) \tilde{X}_p\right)(\varphi(x)), \\ \varphi_x^T(y_T) &= \exp\left(\sum_{p=\dim \tilde{V}_1+1}^{\tilde{N}} \varphi_x^p(y_T) \tilde{X}_p\right)(\varphi(x)) \end{aligned}$$

и

$$\tilde{\varphi}_x^T(y_T) = \exp\left(\sum_{p=\dim \tilde{V}_1+1}^{\tilde{N}} \left(\varphi_x^p(y_T) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_\mu=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu+\dim \tilde{V}_1, \beta}^{p+\dim \widehat{V}_1} \varphi_x^\beta(y_T) \psi_\mu(x)\right) \tilde{X}_p\right)(\varphi(x)).$$

Положим также

$$\psi_x^H(y_H) = \exp\left(\sum_{q=1}^{\dim \widehat{V}_1} \psi_x^q(y_H) \tilde{X}_q\right)(\psi(x)),$$

$$\psi_x^T(y_T) = \exp\left(\sum_{q=\dim \widehat{V}_1+1}^{\widehat{N}} \psi_x^q(y_T) \widetilde{X}_q\right)(\psi(x))$$

и

$$\widehat{\psi}_x^T(y_T) = \exp\left(\sum_{q=\dim \widehat{V}_1+1}^{\widehat{N}} \left(\psi_x^q(u_T) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_\mu=1 \\ \beta: \deg \widehat{X}_\beta=1}} F_{\mu+\dim \widehat{V}_1, \beta}^{q+\widetilde{N}} \varphi_x^\beta(y_T) \psi_\mu(x)\right) \widetilde{X}_q\right)(\psi(x)).$$

Теорема 2.13. Субриманов дифференциал липшицевой композиции ψ_φ в точках, где он существует, имеет вид

$$\begin{pmatrix} D\varphi_x^H(x) & 0 \\ D\psi_x^H(x) & 0 \\ 0 & D\widetilde{\varphi}_x^T(x) \\ 0 & D\widehat{\psi}_x^T(x) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Доказательство. Утверждение о структуре первого «диагонального» блока

$$\begin{pmatrix} D\varphi_x^H(x) \\ D\psi_x^H(x) \end{pmatrix}$$

матрицы (13) доказывается аналогично [12, Теорема 12] с очевидными изменениями. Утверждение о структуре второго «диагонального» блока

$$\begin{pmatrix} D\widetilde{\varphi}_x^T(x) \\ D\widehat{\psi}_x^T(x) \end{pmatrix}$$

матрицы (13) также следует схеме доказательства [12, Теорема 12] с очевидными изменениями и с учетом результатов теоремы 2.10.

Так как в нормальных координатах hc -дифференциал является линейным отображением с матрицей, структура которой описана в теореме 2.6, то из этой структуры и из (1) следует, что дифференциалы, построенные в ходе доказательства данной теоремы, составляют структуру hc -дифференциала композиции ψ_φ . То есть, построенное отображение, матрица которого равна (13), является горизонтальным гомоморфизмом, который задается единственным образом. Действительно, достаточно предположить существование еще одного аппроксимирующего $\psi_\varphi(y)$ отображения, которое является линейным по нормальным координатам y относительно x , имеющего аналогичную структуру. Тогда из теоремы 2.6 и из (1) покоординатно получим единственность. Теорема доказана. $\square$

Для формулировки результата о площади композиции введем понятие субримановой меры.

Определение 2.14. Значение *субримановой меры* для $A \subset \mathcal{G}$ равно

$$\mathcal{H}^\nu(A) = \omega_{\dim \mathcal{V}_1} \omega_{\dim \mathcal{V}_2} \cdot \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где ω_m обозначает объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$, а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A .

Несмотря на нестандартное определение (в определении $\mathcal{H}^\nu(A)$ добавляется условие $x_i \in A, i \in \mathbb{N}$), функция множества $\mathcal{H}^\nu$ является мерой. В частности, она обладает свойством счетной аддитивности на сигма-алгебре борелевских множеств [12].

Из установленных результатов и [18] выводим формулу площади для липшицевых композиций.

Теорема 2.15. В условиях теорем 2.10 и 2.13 справедлива формула площади для композиций

$$\int_A \mathcal{J}(\psi_\varphi, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \mathcal{H}^\nu(\psi_\varphi(A)),$$

где $A \subset \mathcal{G}$ — измеримое множество, якобиан $\mathcal{J}(\psi_\varphi, x)$ совпадает со значением

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det((D\varphi_x^H)^*(x)D\varphi_x^H(x) + (D\psi_x^H)^*(x)D\psi_x^H(x))} \times \\ & \times \sqrt{((D\tilde{\varphi}_x^T)^*(x)D\tilde{\varphi}_x^T(x) + (D\hat{\psi}_x^T)^*(x)D\hat{\psi}_x^T(x))}, \end{aligned}$$

а $\mathcal{H}^\nu$ для $D \subset \varphi_\Gamma(\mathcal{G})$ задается следующим образом:

$$\omega_{\dim \mathcal{V}_1} \omega_{\dim \mathcal{V}_2} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(w_i, r_i) \supset D, w_i \in D, r_i < \delta \right\},$$

и является мерой.

Замечание 2.16. Если φ — горизонтальный гомоморфизм, то субриманов дифференциал имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi_x^H(x) & 0 \\ D\psi_x^H(x) & 0 \\ 0 & \varphi_x^T(x) \\ 0 & D\psi_x^T(x) \end{pmatrix},$$

а якобиан $\mathcal{J}(\psi_\varphi, x)$ равен

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det((\varphi_x^H)^*(x)\varphi_x^H(x) + (D\psi_x^H)^*(x)D\psi_x^H(x))} \times \\ & \times \sqrt{((\varphi_x^T)^*(x)\varphi_x^T(x) + (D\psi_x^T)^*(x)D\psi_x^T(x))}. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Карманова М.Б. О липшицевости композиций отображений на двухступенчатых группах Карно // *Мат. труды* 2025. Т. 28, № 4. С. 79–104.
2. Миклюков В.М., Клячин А.А., Клячин В.А. *Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского*. Волгоград: ВолГУ, 2011.
3. Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. *Минимальные поверхности и проблема Плато*. М.: Наука, 1987.
4. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей*. М.: Наука, 1991.
5. Fomenko A.T. (ed.). *Minimal surfaces, Advances in Soviet mathematics, 15*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.
6. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // *Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica*. 2006. V. 3. P. 145–161.
7. Hladky R.K., Pauls S.D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
8. Petitot J. *Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles*. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
9. Карманова М.Б. О липшицевых графиках на классах двухступенчатых групп Карно // *Сиб. мат. журн.* 2025. Т. 66, № 5. С. 901–919.
10. Карманова М.Б. Композиции двух отображений на двухступенчатых группах Карно // *Тр. МИАН*. 2026. Т. 332.
11. Karmanova M.B. Measures on the Images of Compositions of Classes of Lipschitz Mappings on Two-Step Carnot Groups // *Lobachevskii J. of Math.* 2026. V. 47, № 2. С. 552–568.
12. Карманова М.Б. Метрические свойства отображений, задающих липшицевы графики на двухступенчатых группах Карно // *Сиб. мат. журн.* 2022. Т. 66, № 6. С. 1094–1107.

13. *Folland G.B., Stein E.M. Hardy spaces on homogeneous group.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
14. *Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Ann. Math.* 1989. V. 129. P. 1–60.
15. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А. Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли // Сиб. мат. журн.* 2001. Т. 42, № 4. С. 731–748.
16. *Карманова М.Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
17. *Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
18. *Карманова М.Б. Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. матем.* 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

References

1. *Karmanova M.B. On Lipschitz Continuous Compositions of Mappings on Two-Step Carnot Groups // Sib. Adv. Math.* 2026. V. 36, N 1. P. 43–58.
2. *Miklyukov V.M., Klyachin A.A., Klyachin V.A. Maximal Surfaces in Minkowski Space-Time.* Volgograd: VolSU, 2011.
3. *Dao Trong Thi, Fomenko A.T. Minimal Surfaces, Stratified Multivarifolds and the Plateau Problem.* Translation of Mathematical Monographs, 84. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.
4. *Fomenko A.T., Tuzhilin A.A. Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space.* Translation of Mathematical Monographs, 93. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.
5. *Fomenko A.T. (ed.). Minimal surfaces, Advances in Soviet mathematics, 15.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.
6. *Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the rototranslation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica.* 2006. V. 3. P. 145–161.

7. Hladky R.K., Pauls S.D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
8. Petitot J. *Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles*. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
9. Karmanova M.B. Lipschitz Graphs on Classes of Two-Step Carnot Groups // *Sib. Math. J.* 2025. V. 66, N 5. P. 1195–1211.
10. Karmanova M.B. Compositions of Two Mappings on Two-Step Carnot Groups // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2026. V. 332.
11. Karmanova M.B. Measures on the Images of Compositions of Classes of Lipschitz Mappings on Two-Step Carnot Groups // *Lobachevskii J. of Math.* 2026. V. 47, N 2. P. 552–568.
12. Karmanova M.B. Metric Properties of Mappings Defining Lipschitz Graphs on Two-Step Carnot Groups // *Sib. Math. J.* 2025. V. 66, N 6. P. 1422–1433.
13. Folland G.B., Stein E.M. *Hardy spaces on homogeneous group*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
14. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // *Ann. Math.* 1989. V. 129. P. 1–60.
15. Berestovskii V.N., Zubareva I.A. Shapes of spheres of special nonholonomic left-invariant intrinsic metrics on some Lie groups // *Sib. Math. J.* 2001. V. 42, N 4. P. 613–628.
16. Karmanova M.B. The graphs of Lipschitz functions and minimal surfaces on Carnot groups // *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N 4. P. 672–690.
17. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings // *The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
18. Karmanova M.B. An area formula for Lipschitz mappings of Carnot–Carathéodory spaces // *Izv. Math.* 2014. V. 78, N 3. C. 475–499.

Информация об авторе

Мария Борисовна Карманова, доктор физико-математических наук

SPIN 3371-8763 AuthorID: 156607

Scopus Author ID 8609942600 WoS ID: T-3468-2017

Author Information

Maria B. Karmanova, Doctor of Mathematics

SPIN 3371-8763 AuthorID: 156607

Scopus Author ID 8609942600 WoS ID: T-3468-2017

*Статья поступила в редакцию 29.06.2026;
одобрена после рецензирования 03.07.2026; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 29.06.2026;
approved after reviewing 03.07.2026; accepted for publication 06.08.2026*